Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Senyals discrets

Versió 2007/2

Professor: Xavi Giró i Nieto

Objectius

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

- En finalitzar aquest tema, l'estudiant haurà de ser capaç de:

  - Expressar i interpretar correctament un senyal discret.

  - Reconèixer la durada d’un senyal discret.

  - Calcular la versió delmada d’un senyal discret.

  - Interpretar i generar criteris d’interpolació de senyals discrets.

  - Expressar i dibuixar els senyals discrets bàsics.

  - Relacionar la forma d’un senyal exponencial a partir de la posició de z en el pla complexe.

  - Estudiar la periodicitat d’un senyal sinusoïdal discret.

Índex

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Definicions

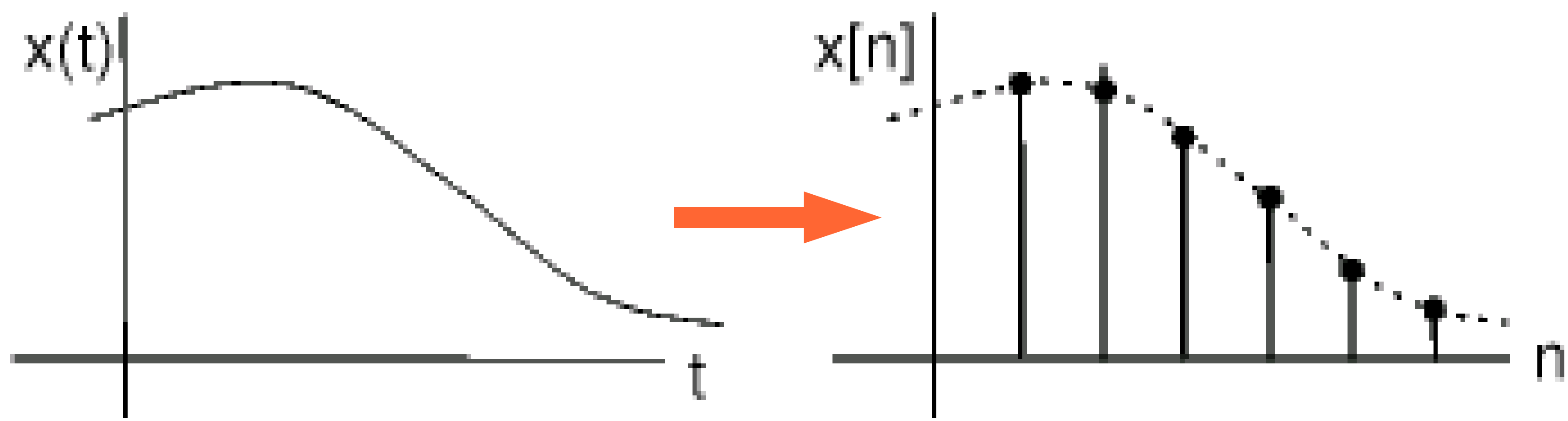
Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Seqüència

- Una seqüència *x[n]* és un conjunt de nombres ordenats segons l'índex *n*.

Seqüència *x* $x=\{\ x[n]\ \} \quad -\infty<n<\infty, n\in\mathbb{Z}$

- El mostreig d'un senyal continu genera una seqüència o senyal discret (en el temps).



Senyal continu

Senyal discret o seqüència

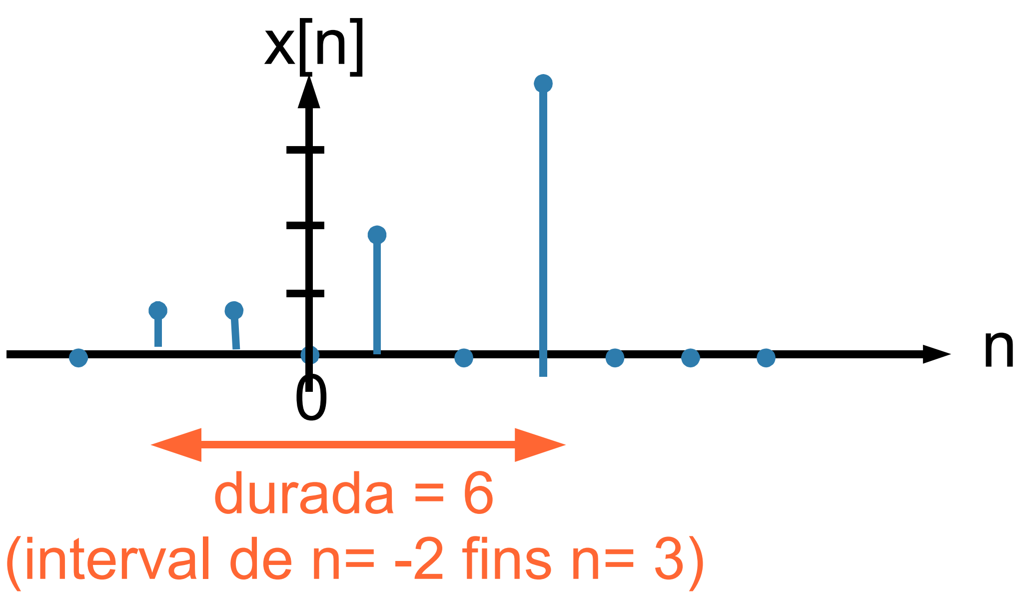
Definicions

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Durada

- La durada d'una seqüència és el nombre de mostres contingudes en un interval que conté totes les mostres de la seqüència diferents de 0 (dins l'interval pot haver-hi mostres de valor zero).
- Exemple:

$$x[n]=\{\ldots 0,0,1,1,\underline{0},2,0,4,0,0,0\ldots\}$$



Definicions

Durada

- La durada de les seqüències pot ser *finita* o *infinita*.
- Exemples:

Seqüència finita

$$x[n]=\{\ldots 0,0,1,1,\underline{0},2,0,4,0,0,0\ldots\}$$

durada = 6

Seqüència infinita

$$x[n]=n=\{\ldots -4,-3,-2,-1,\underline{0},1,2,3,4,5,6\ldots\}$$

Índex

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Transformacions de la var.indep.

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

- En el cas dels senyals discrets, la variable independent és l'índex de la seqüència.
- Normalment, prendrem *n* entera per representar la v.i.
- El resultat de la transformació també ha de ser un enter.

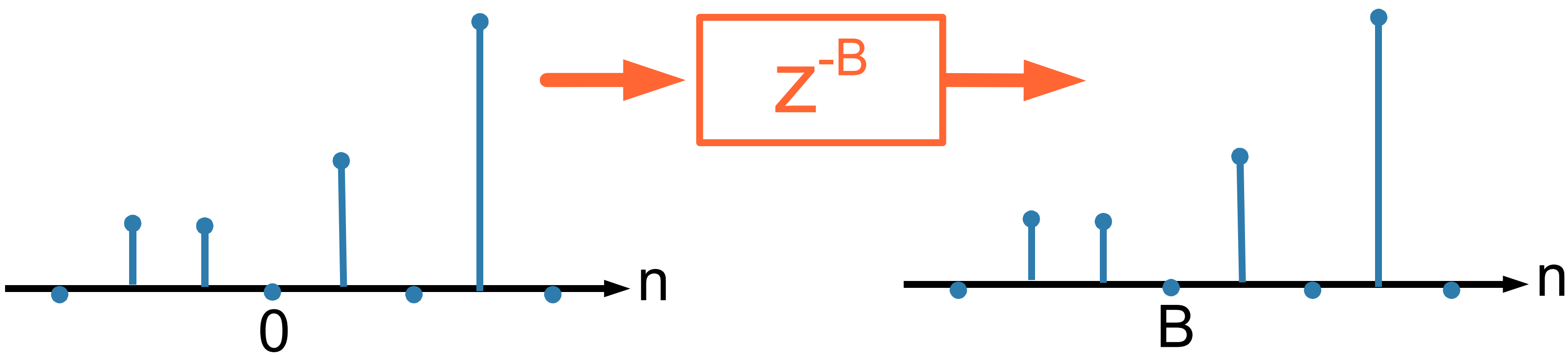
Desplaçament	→	$y[n]=x[n-B], \quad B\in\mathbb{Z}$
Delmat	→	$y[n]=x[An], \quad A\in\mathbb{N}$
Interpolació	→	$y[An]=x[n], \quad A\in\mathbb{N}; \quad i\,?$
Reflexió	→	$y[n]=x[-n], \quad A\in\mathbb{N}$

Transformacions de la var.indep.

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Desplaçament

$$y[n]=x[n-B], \quad B\in\mathbb{Z}$$



- Si la variable *n* augmenta d'esquerra a dreta, el canvi suposa:

B > 0 ➔ el senyal es desplaça cap a la dreta (retard)
B < 0 ➔ el senyal es desplaça cap a l'esquerra (avançament)

Transformacions de la var.indep.

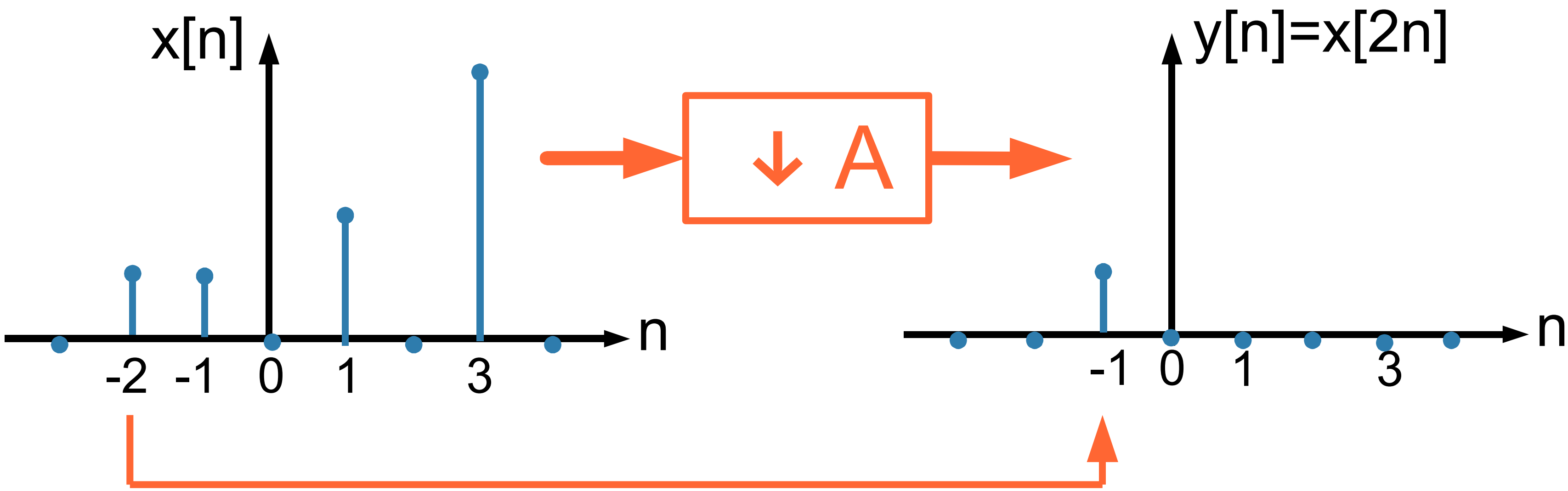
Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Delmat

$$y[n] = x[An], \quad A \in \mathbb{N}$$

- La seqüència resultant conserva una de cada A mostres a l'entrada.
- Aquesta operació s'anomena delmat.

- Exemple:

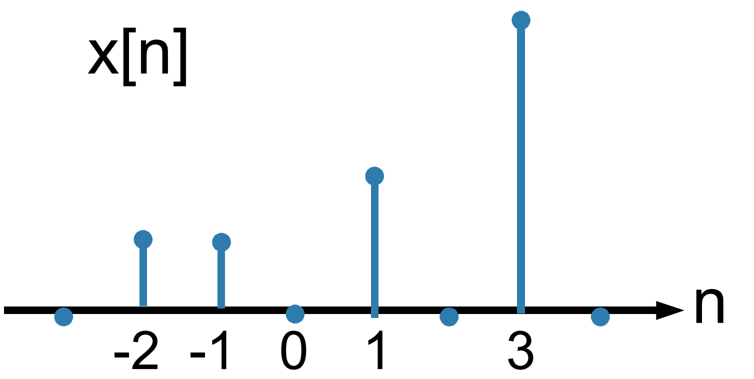


Transformacions de la var.indep.

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Exercici: Dibuixeu les següents seqüències:

a) y[n]=x[2n-1]
b) y[n]=x[2n+1]



$$x[n]=\{\ldots 0,0,1,1,\underline{0},2,0,4,0,0,0\ldots\}$$

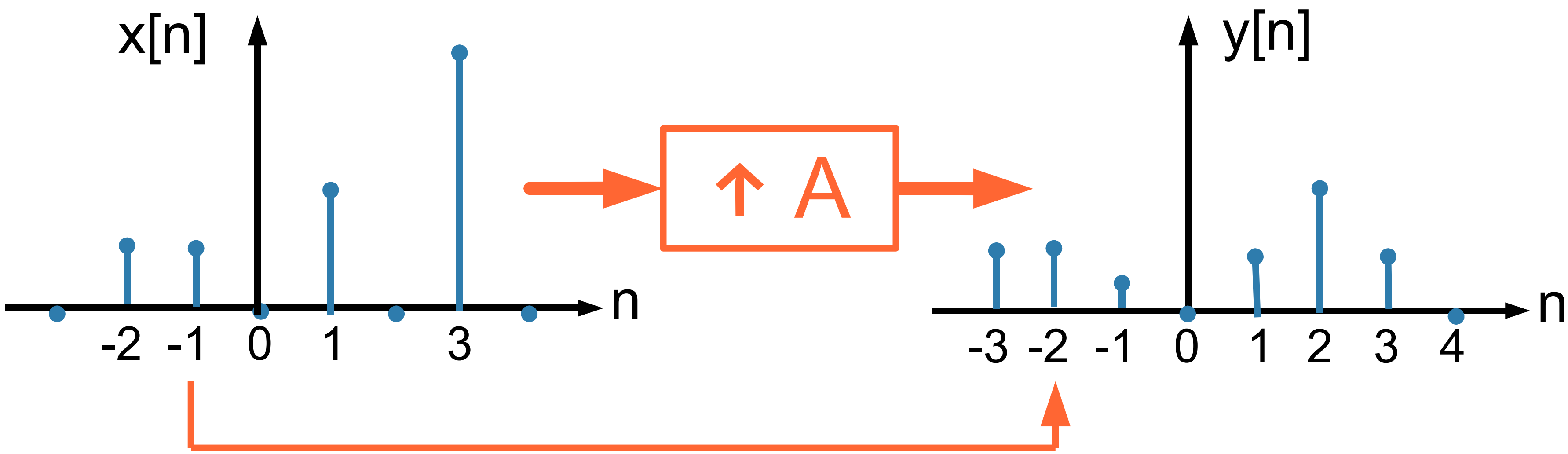
Transformacions de la var.indep.

Interpolació

$$y[An]=x[n],\quad A\in\mathbb{N}$$

- La seqüència resultant necessita nous valors intermitjos que cal determinar segons algun criteri.
- Aquesta operació s'anomena interpolació.

- Exemple: y[2n] = x[n] + interpolació lineal



Transformacions de la var.indep.

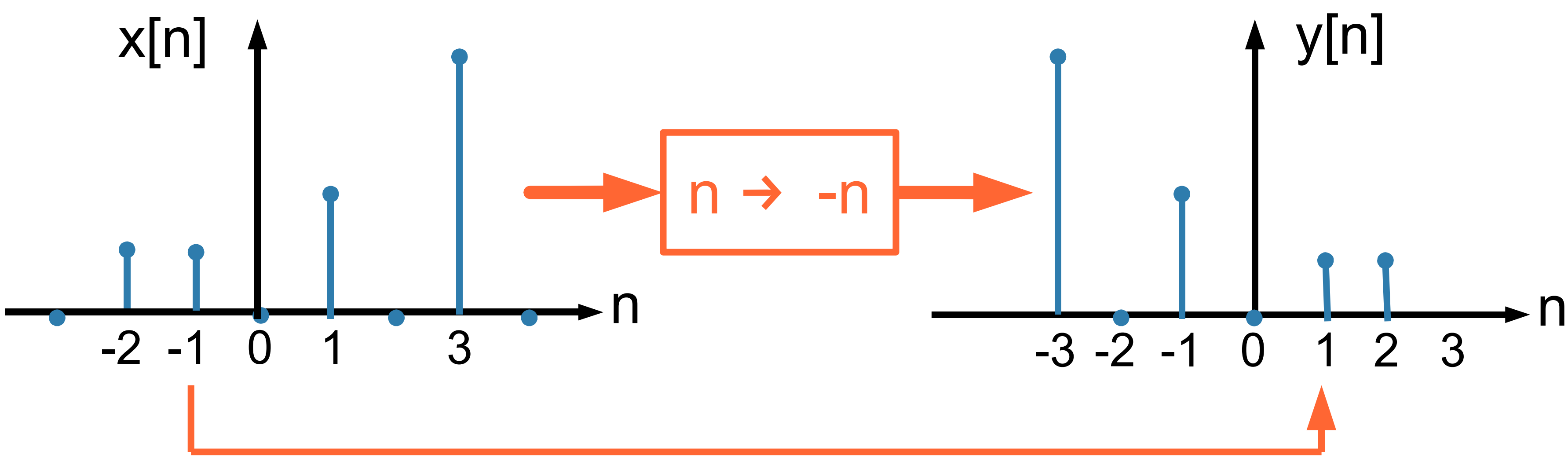
Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Reflexió

$$y[n] = x[-n]$$

- La seqüència gira amb l'eix a n=0.
- Idèntic al cas continu.

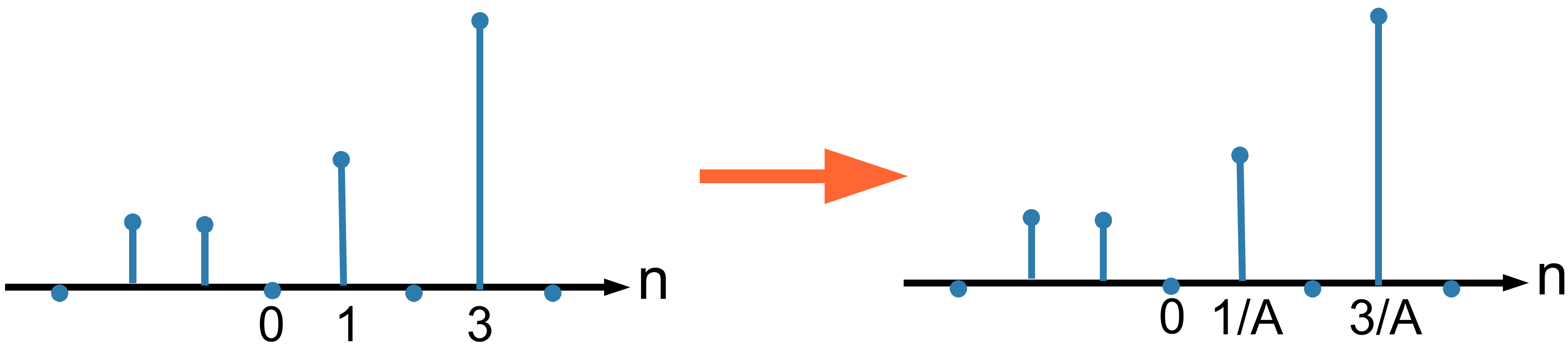
- Exemple:



Transformacions de la var.indep.

Analogia amb el cas continu

$$'y[n]=x[An]', \quad A \in \mathbb{R}$$

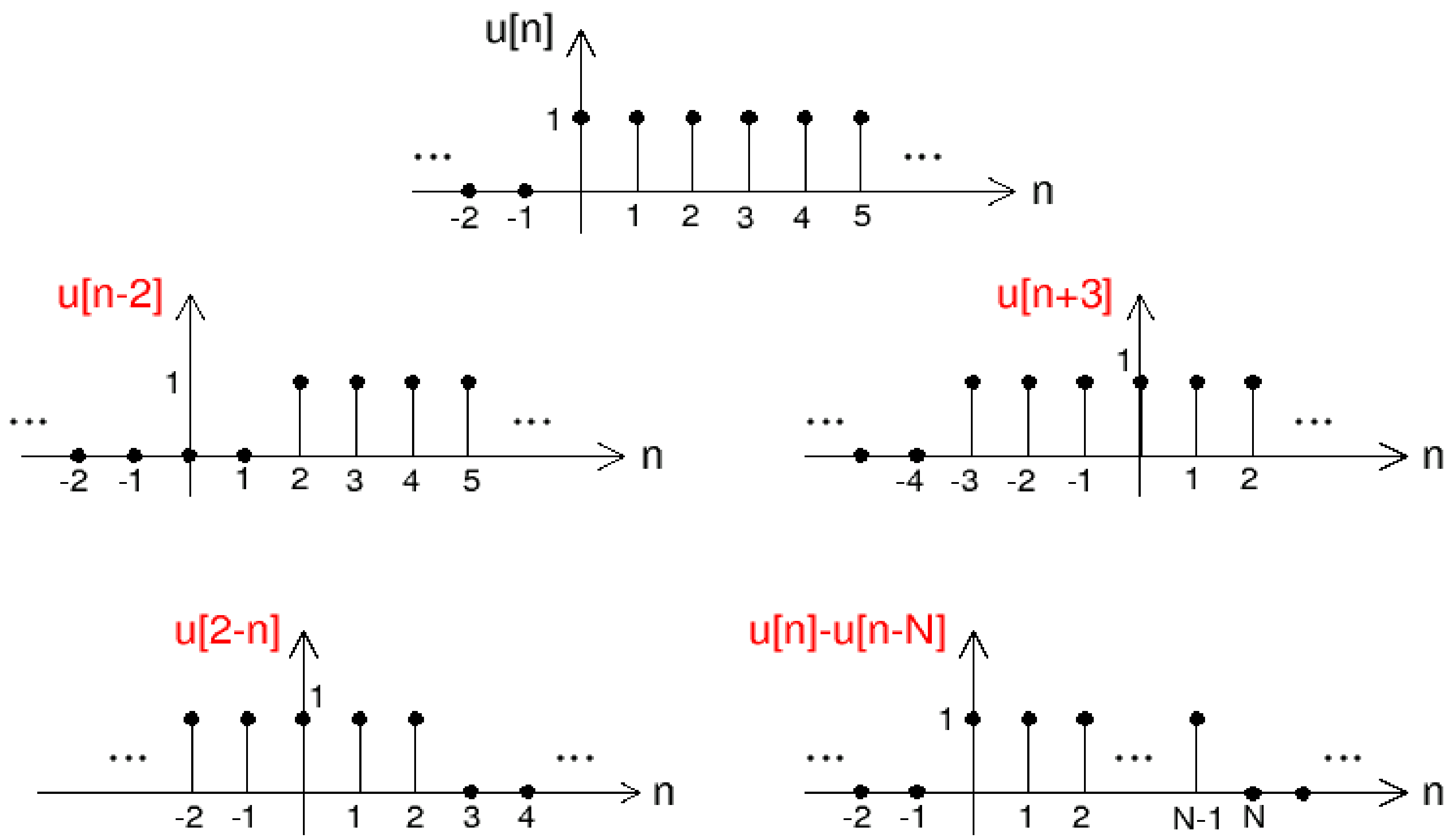


| A | > 1 ➔ el senyal tindrà menys mostres (delmat)
"| A | < 1" ➔ el senyal tindrà més mostres (interpolació)
A < 0 ➔ reflexió del senyal respecte l'eix n=0

Transformacions de la var.indep.

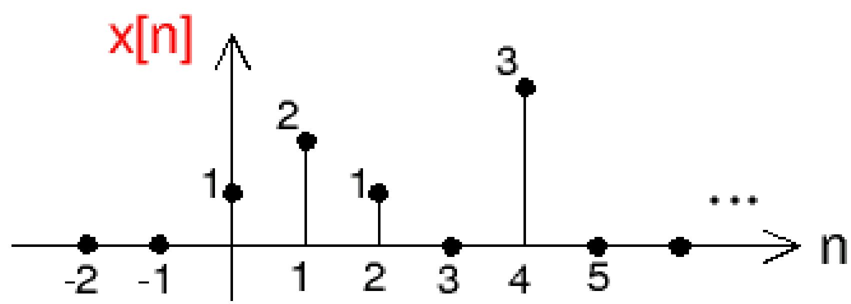
Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

- Exemple:

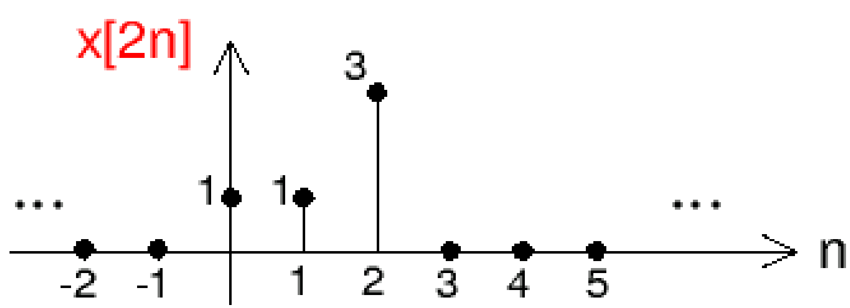


Transformacions de la var.indep.

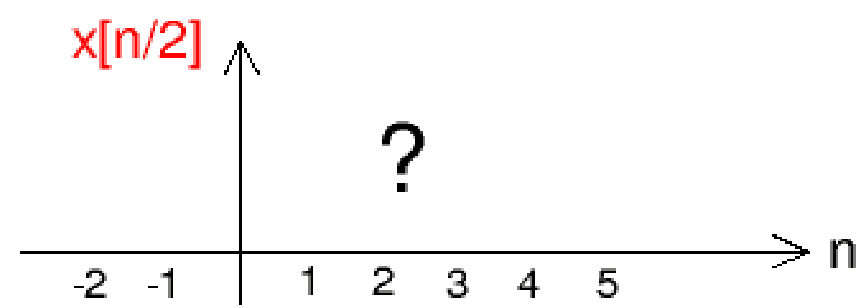
- Exemple:



Delmat



Interpolació

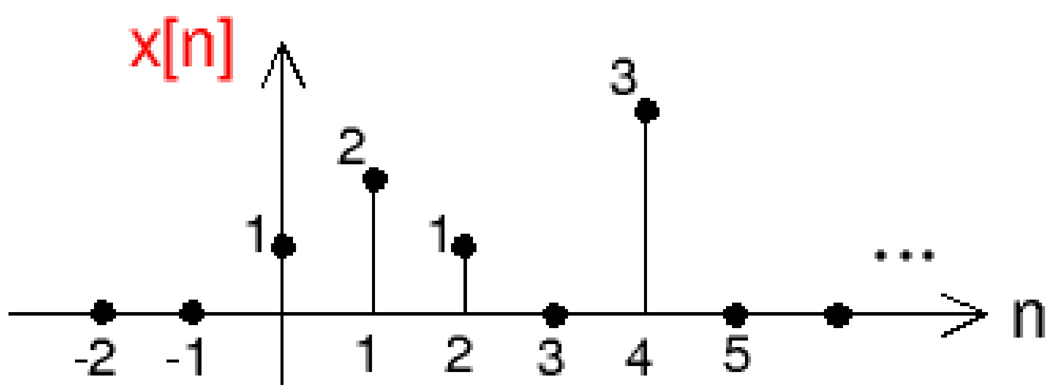


cal establir un criteri

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Exercici: Dibuixeu y[n] si la seqüència x[n] s'interpola segons l'expressió donada de y[n].

$$y[2n-1]=x[n]$$
$$y[2n]=\frac{x[n]+x[n+1]}{2}$$

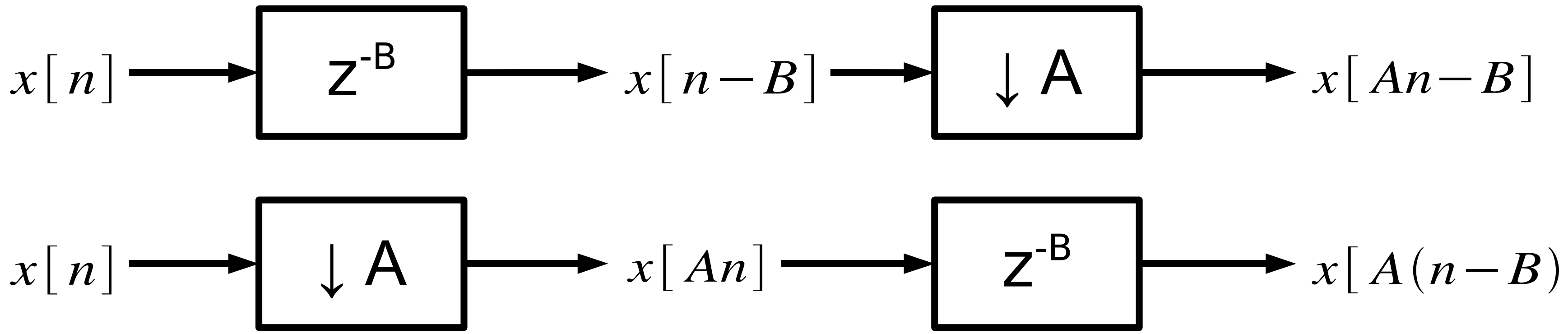


Transformacions de la var.indep.

Exercici: Inventeu-vos un altre criteri d'interpolació per 2 de la seqüència x[n]. Expresseu-lo analíticament i dibuixeu-ne la seqüència resultant y[n].

Transformacions de la var.indep.

- Com en el cas continu, l'ordre de les operacions pot alterar el resultat.



<u>Exemple 1</u>

1. Desplaçament de B

$$y_1[n] = x[n-B]$$

2. Delmat per A

$$y_2[n] = y_1[An] = x[An-B]$$

<u>Exemple 2</u>

1. Delmat per *A*

$$y_1[n] = x[An]$$

2. Desplaçament de *B*

$$y_2[n] = y_1[n-B] = x[A(n-B)]$$

Expressions diferents

Índex

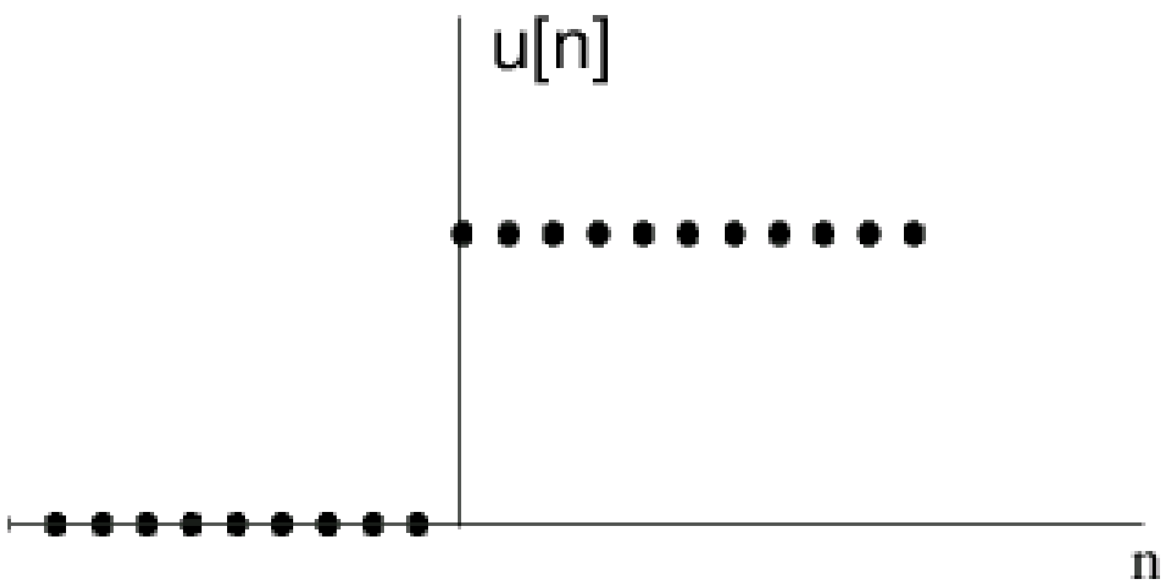
Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Senyals discrets bàsics

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Graó

$$u[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n\leq -1\end{cases}$$

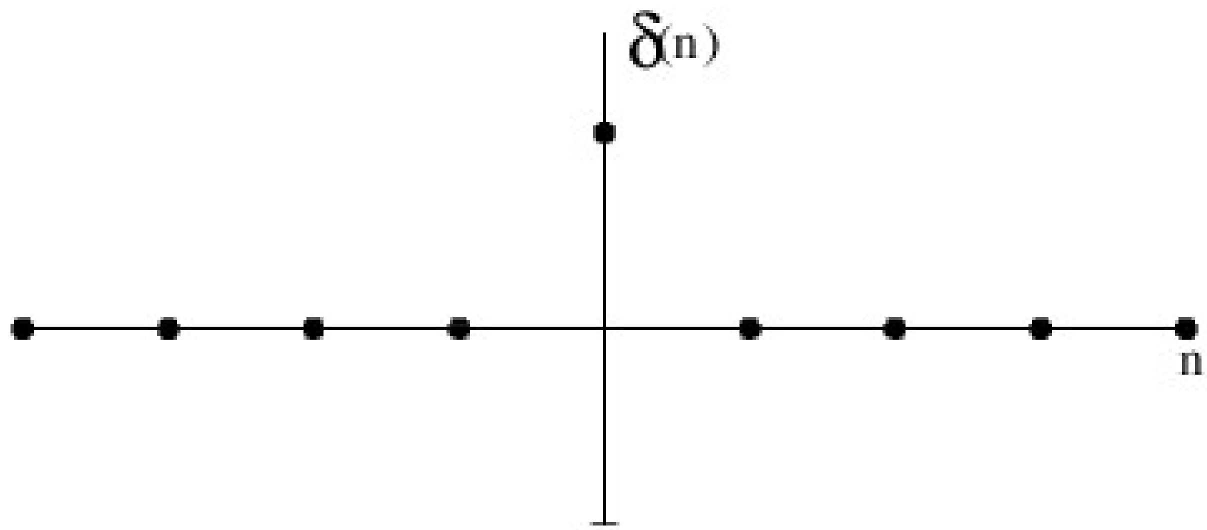


Senyals discrets bàsics

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Delta de Kronecker o impuls unitari

$$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$



Senyals discrets bàsics

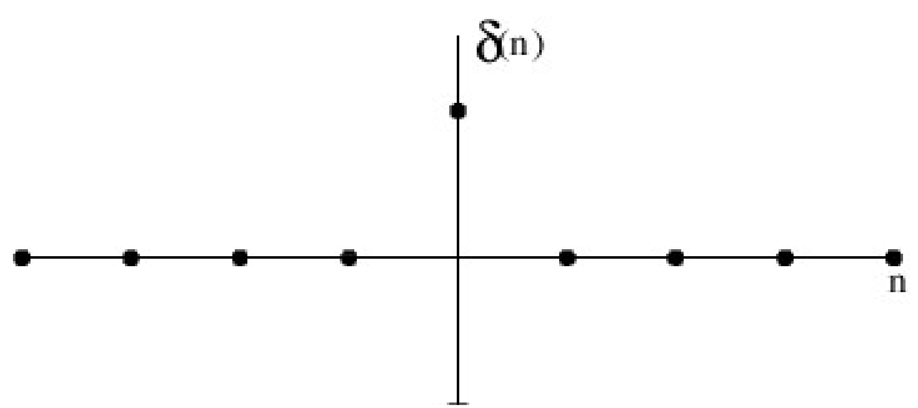
Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Delta de Kronecker o impuls unitari

- Qualsevol seqüència es pot representar com una combinació lineal de deltes desplaçades.

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]$$

$$x[n] = \ldots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \ldots$$

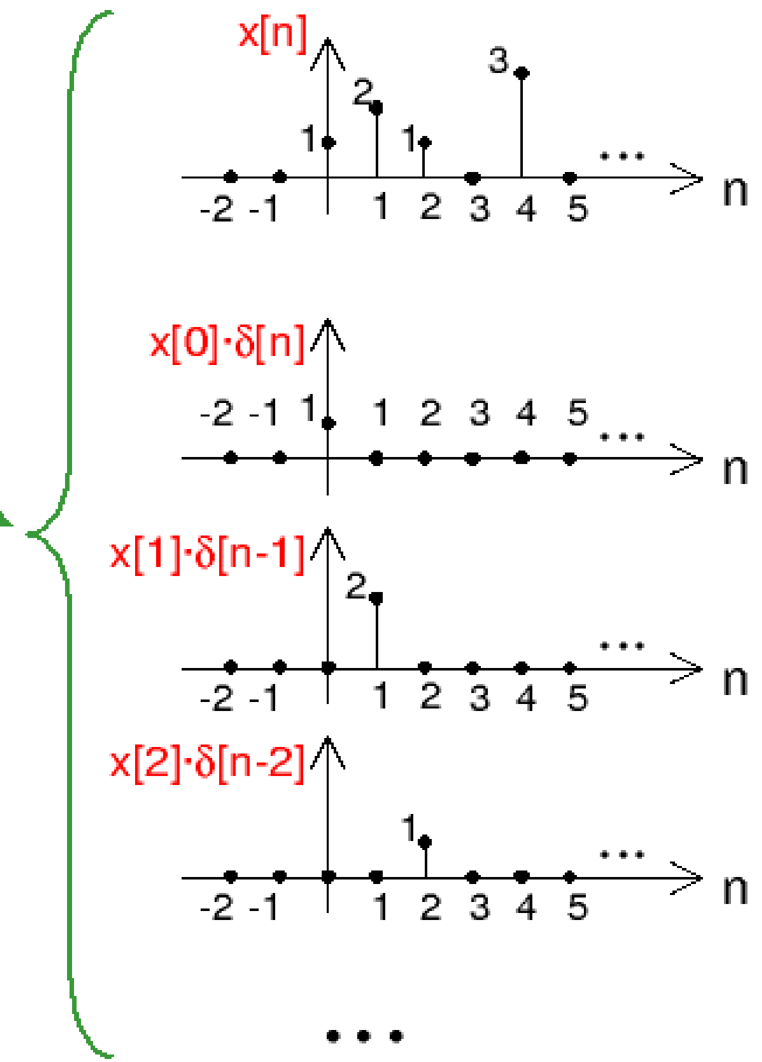


Senyals discrets bàsics

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Delta de Kronecker o impuls unitari

- Propietats:
  - $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$
  - $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\,\delta[n-m]$
  - $u[n] = \sum_{m=0}^{\infty} \delta[n-m]$



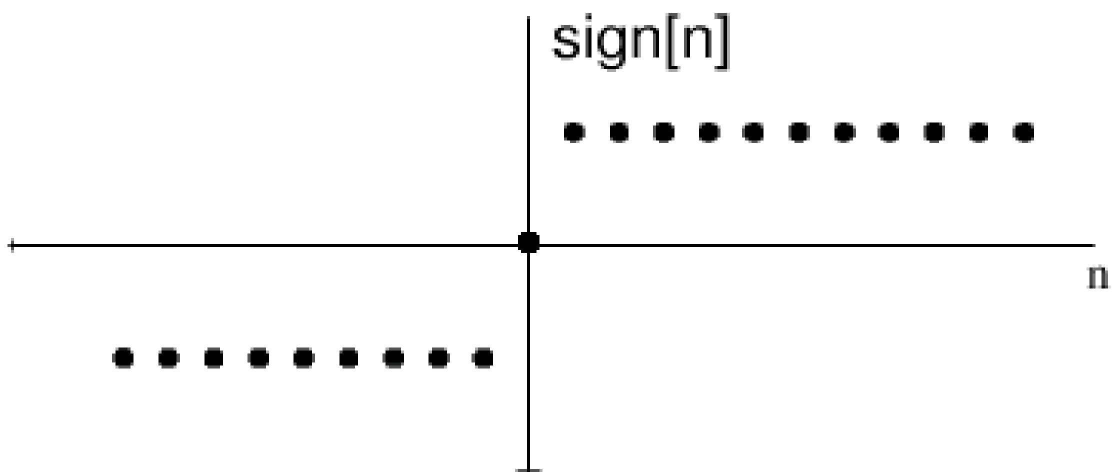
Senyals discrets bàsics

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Signe

$$signe[n]=\begin{cases}1 & n>0\\ 0 & n=0\\ -1 & n<0\end{cases}$$

$$signe[n]=u[n]-u[-n]$$



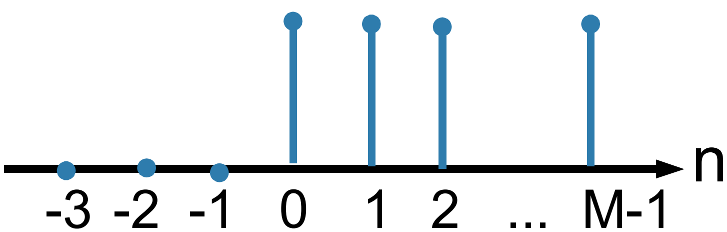
Senyals discrets bàsics

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Pols rectangular

$$P_M[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le M-1 \\ 0 & altrament \end{cases}$$

durada



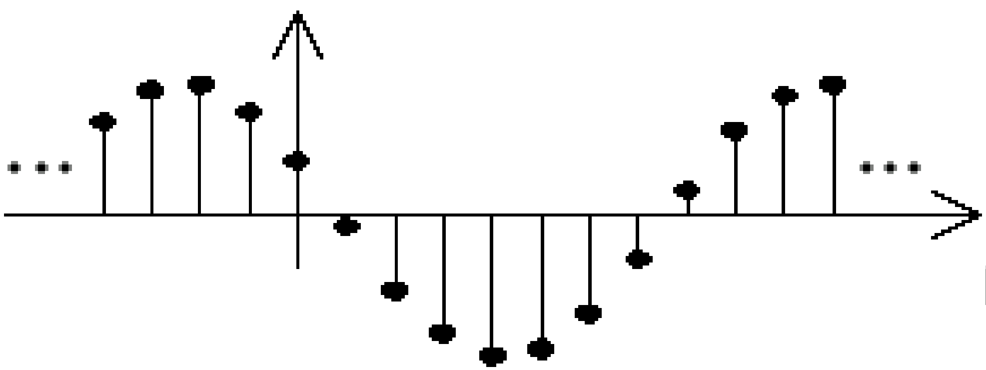
Senyals discrets bàsics

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Sinusoidals

$$x[n] = A\cos(\omega n + \phi)$$

freqüència angular



- Casos particulars:

$$\omega = 0, \quad \phi = 0 \quad \rightarrow \quad x[n] = A$$

$$\omega = \pi, \quad \phi = 0 \quad \rightarrow \quad x[n] = A(-1)^n$$

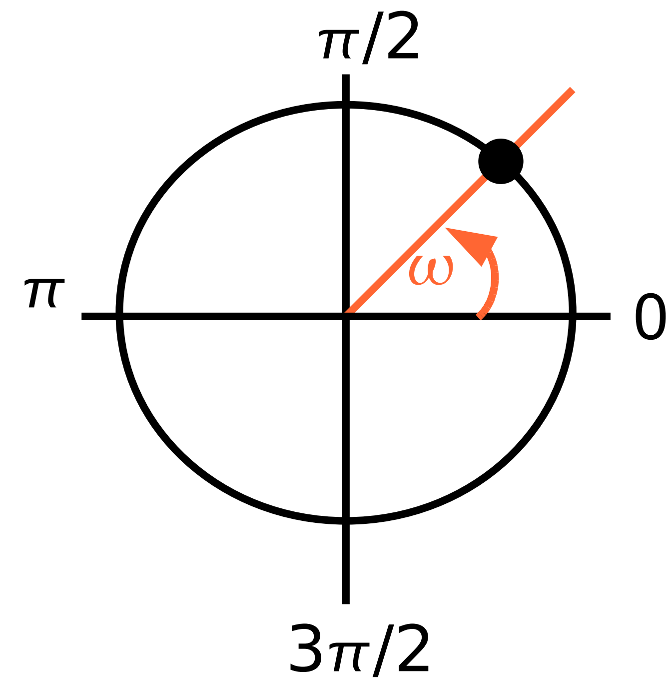
Senyals discrets bàsics

Sinusoidals

- Els valors de x[n] poden calcular-se còmodament a partir de les projeccions sobre l'eix horitzontal (cosinus) o vertical (sinus) d'un punt que gira un angle ω per a cada nova mostra al voltant d'una circumferència de radi 1.

$$x[n]=\cos(\omega n)$$

$$x[n]=\sin(\omega n)$$



Senyals discrets bàsics

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Sinusoidals

- Les freqüències angulars discretes prenen valors entre $[-\pi, \pi]$, o $[0, 2\pi]$ perquè són periòdiques cada 2π.

$$\left.\begin{cases} x_1[n] = \cos(\omega n + \phi) \\ x_2[n] = \cos((\omega + 2\pi) n + \phi) \end{cases}\right\} \quad x_1[n] = x_2[n]$$

$$-\pi \le \omega \le \pi$$

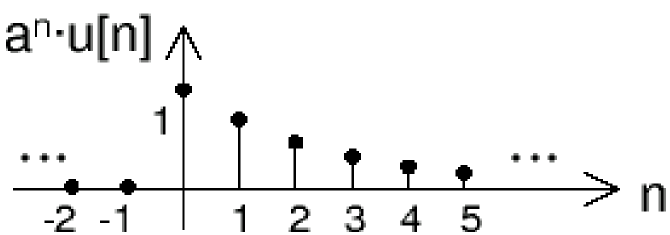
$$0 \le \omega \le 2\pi$$

Senyals discrets bàsics

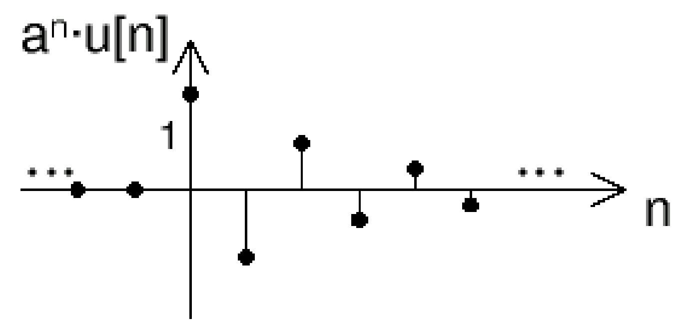
Exponencial real unilateral

$$x[n]=a^n u[n], \quad a\in\mathbb{R}$$

|a| <1

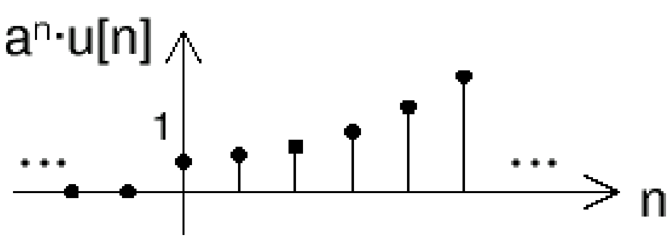


0< a <1

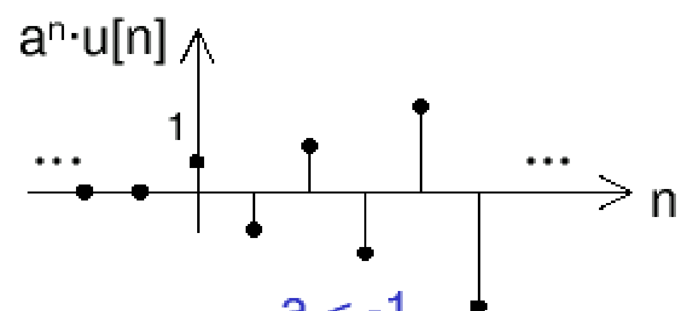


-1<a<0

|a| >1



a > 1



a < -1

Senyals discrets bàsics

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Exponencial complexa

$$x[n]=z^n; \qquad z\in\mathbb{C} \longrightarrow z=|z|e^{j\omega}$$

$$x[n]=|z|^n e^{j(\omega n)}$$

$$x[n]=|z|^n(\cos(\omega n)+j\sin(\omega n))$$

exponencial real

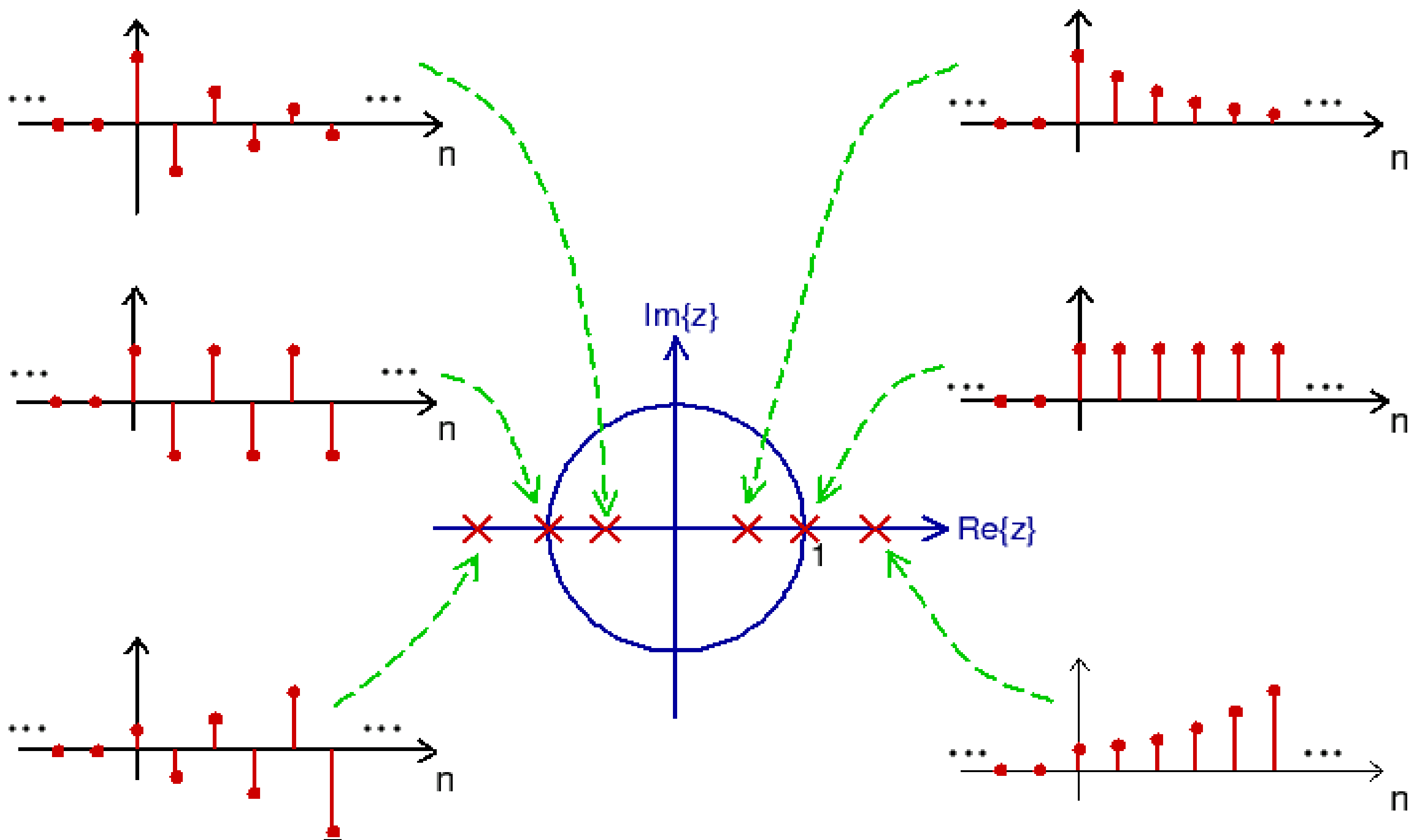
sinusoides

Senyals discrets bàsics

Exponencial complexa unilateral

- La representació de *z* en el pla complexe facilita recordar les propietats de les seqüències exponencials.

Gràfiques de Re{ z^n u[n] }



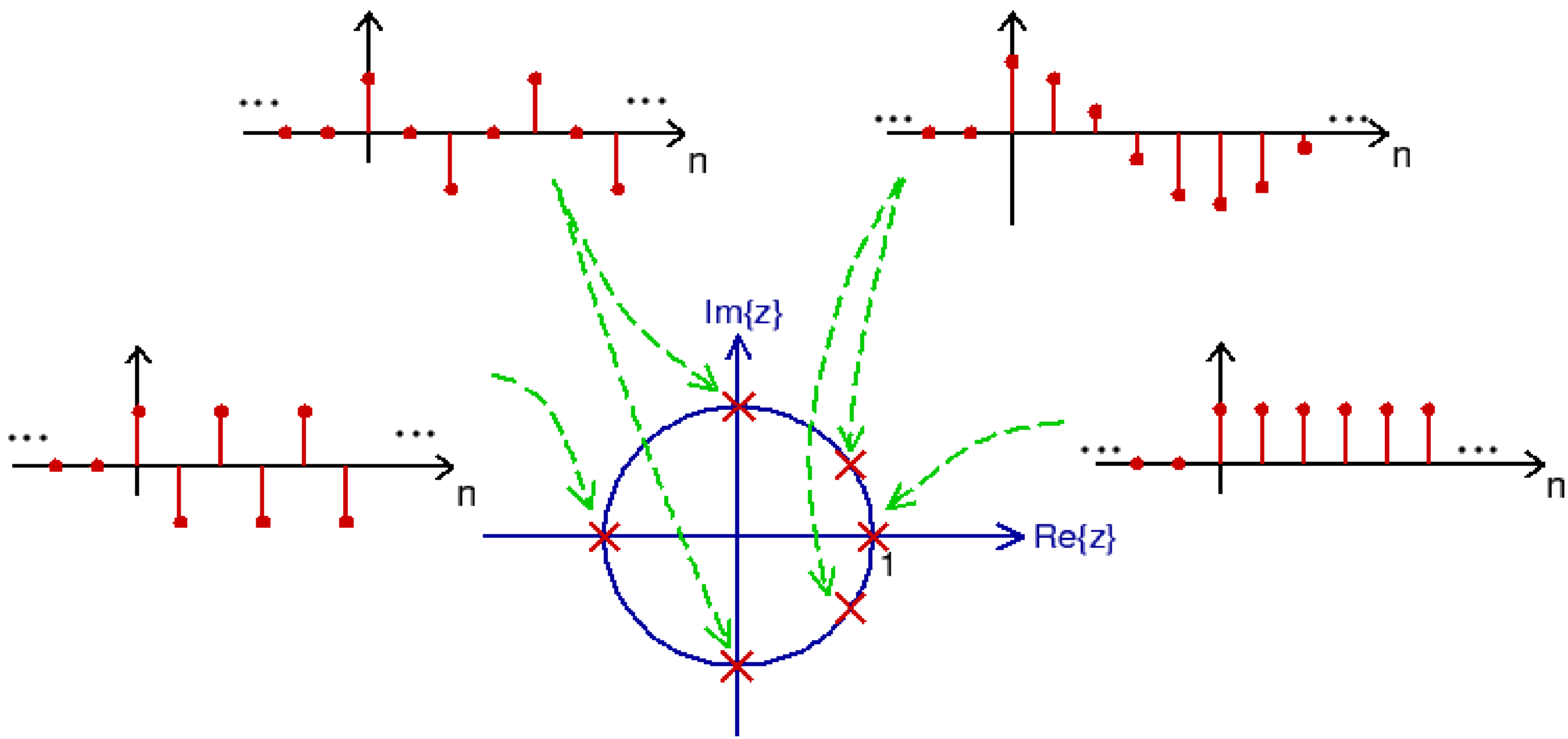
Senyals discrets bàsics

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Exponencial complexa unilateral

- La representació de *z* en el pla complexe facilita recordar les propietats de les seqüències exponencials.

Gràfiques de Re{ z^n u[n] }



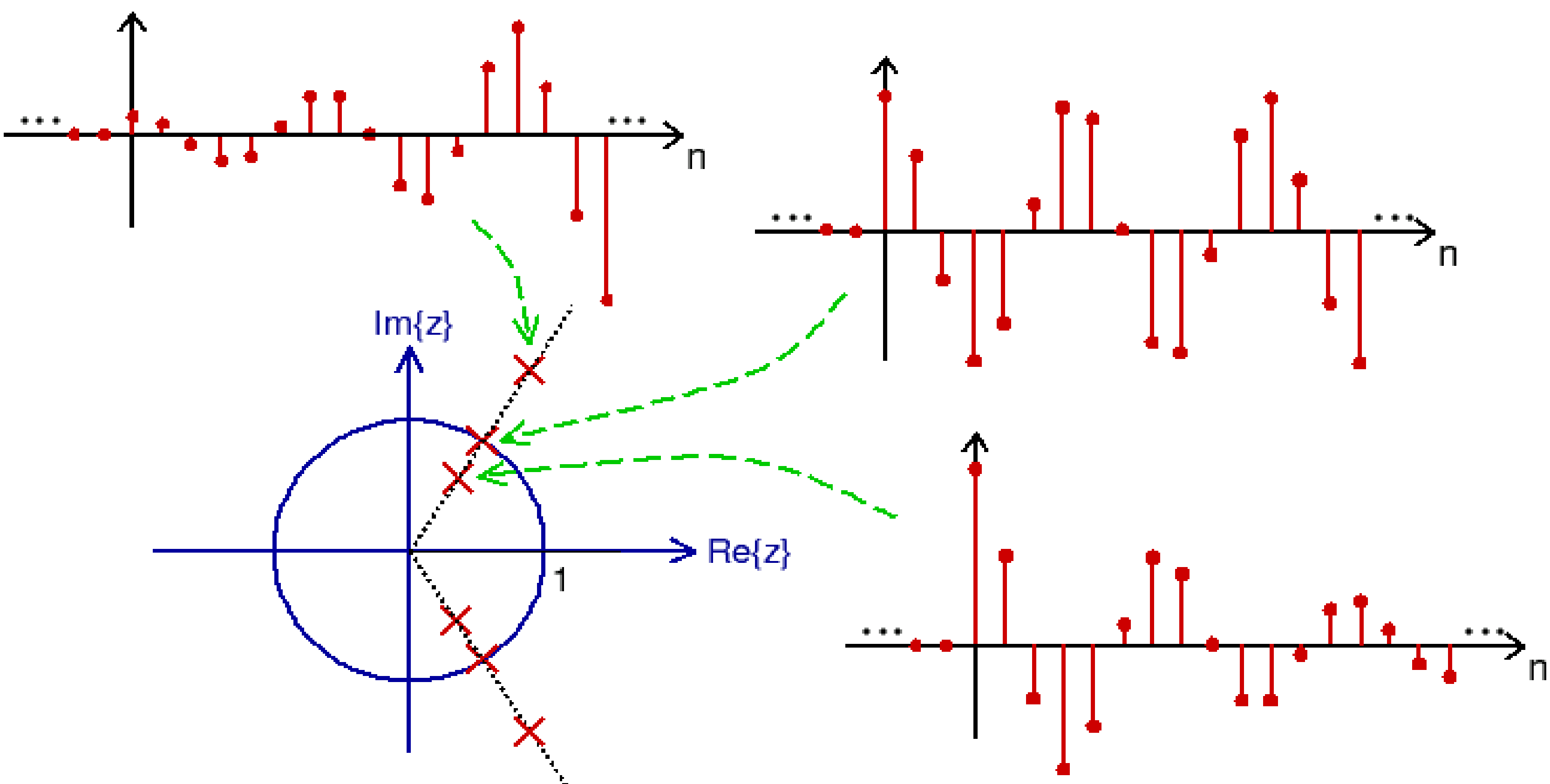
Senyals discrets bàsics

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Exponencial complexa unilateral

- La representació de *z* en el pla complexe facilita recordar les propietats de les seqüències exponencials.

Gràfiques de Re{ z^n u[n] }



Senyals discrets bàsics

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Exponencial complexa

Exercici: Dibuixeu la seqüència x[n] per als diferents valors de ω_i donats.

$$x[n] = Real(z^n) \quad per \quad z = e^{j\omega}$$

$$\omega_i = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

$$-5 \leq n \leq 5$$

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Senyals discrets bàsics

Exponencial complexa d'amplitud unitària

$$x[n] = e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j\sin(\omega n)$$

- L'exponencial complexa discreta d'amplitud unitària conté senyals sinusoïdals en les seves parts real i imaginària.
- Els resultats extrets per ella, es poden extrapolar als senyals sinusoïdals discrets.
- Presenta dues grans diferències respecte la seva versió contínua:

1. No és periòdica per a tots els valors de ω.
2. Valors majors de ω no impliquen necessàriament oscil·lacions més ràpides.

Senyals discrets bàsics

Exponencial complexa d'amplitud unitària

Demo (1)

Una seqüència és periòdica si existeix algun valor enter del període N pel qual es compleixi el següent:

$$x[n]=x[n+N] \quad \forall n, N \in \mathbb{Z}$$

Suposem que existeix un N que fa l'exponencial complexa periòdica i busquem quina condició s'ha de complir,

$$\mathrm{e}^{j\omega n}=\mathrm{e}^{j\omega(n+N)}=\mathrm{e}^{j\omega n}e^{j\omega N} \Leftrightarrow \omega N=2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad N=\frac{2\pi k}{\omega}$$

O de forma equivalent,

$$\frac{\omega}{2\pi}=\frac{k}{N} \in \mathbb{Q}$$

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Senyals discrets bàsics

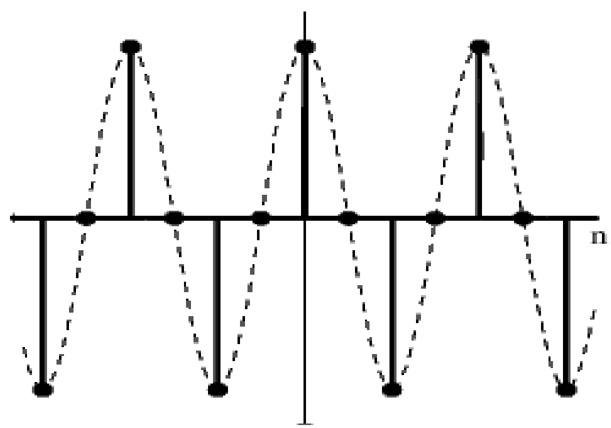
Exponencial complexa d'amplitud unitària

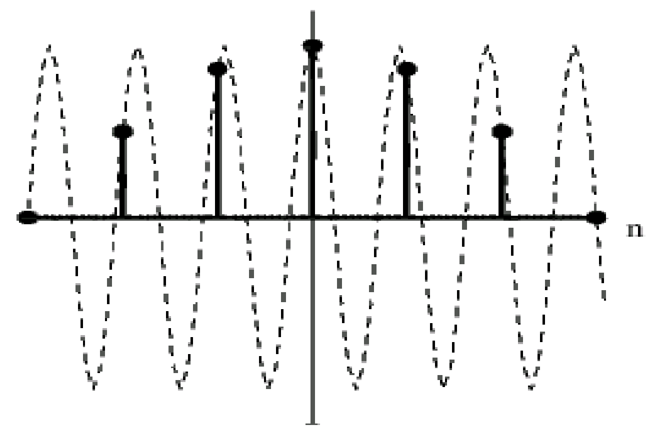
<u>Exemple</u> (2)

Valors més grans de ω no impliquen que el senyal oscil·li més ràpidament.

$$x[n] = \Re\{e^{j\omega n}\} = \cos(\omega n)$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} \qquad \omega_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k > 0, \quad k \in \mathbb{N}$$





ω_1

$$0 < \omega_0 < \omega_1$$

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Exponencial complexa d'amplitud unitària

Exercici: Estudieu si les següents seqüències són periòdiques. En cas de ser-ho, especifiqueu-ne el període.

a) $$x[n]=\sin\left(\frac{2\pi}{30}n\right)$$

b) $$x[n]=\sin\left(2\pi\frac{16}{30}n\right)$$

c) $$x[n]=\sin\left(2\pi\sqrt{2}n\right)$$

Resum

Exercici: Responeu al qüestionari d'autoavaluació disponible al Moodle

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions
Universitat Politècnica de Catalunya

Índex

1. Definicions
2. Transformacions de la variable independent
3. Senyals discrets bàsics